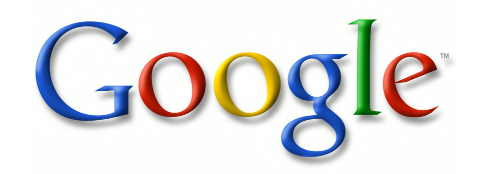
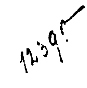






Neuer Beweis der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0.$$

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde von der philosophischen Facultät

der

Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

genehmigt und nebst den beigefügten Thesen öffentlich zu verteidigen

am 15. Juli 1899

von

Edmund Landau

aus Berlin.

Opponenten:

Herr stud. math. **Rudolf Ziegel.**
Herr stud. math. **Fritz Hartogs.**
Herr Dr. phil. **Ernst Steinitz**, Privatdocent an der Kgl. technischen Hochschule zu Charlottenburg.

Berlin 1899.

872.

Meinen lieben Eltern.

Es bezeichne im Folgenden $\mu(k)$ wie gewöhnlich diejenige zahlentheoretische Function, welche

1) für $k = 1$ gleich 1 ist,

2) wenn k durch eine von 1 verschiedene Quadratzahl teilbar ist, gleich 0 ist,

3) wenn jeder Primfactor von k nur einmal in dieser Zahl aufgeht und ϱ die Anzahl der Primfactoren von k ist, gleich $(-1)^\varrho$ ist.

Der schon von Euler ausgesprochene Satz, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

ist, d. h. dass $\lim_{x=\infty} \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k}$ existiert und 0 ist, ist erst in allerneuester Zeit bewiesen worden, und zwar gebührt dies Verdienst Herrn von Mangoldt[1]). Derselbe geht von den Untersuchungen der Herren Hadamard und de la Vallée-Poussin über die Riemannsche ζ-Function aus, und es scheint auch, dass ohne die Benutzung dieser Arbeiten mit den gegenwärtigen Mitteln der Analysis ein Beweis der Eulerschen Behauptung nicht zu führen ist. Setzt man aber in Übereinstimmung mit Herrn von Mangoldt die Ergebnisse jener Untersuchungen als bekannt voraus, so kann man, wie im Folgenden ausgeführt werden wird, auf einem recht kurzen Wege zum Ziele gelangen.

Der Beweis, der den Inhalt dieser Dissertation bildet, benutzt den zuerst von den Herren Hadamard[2]) und de la Vallée-Poussin[3]) bewiesenen Satz[4]):

---

1) „Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$"; Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1897, S. 835—852.

2) Bulletin de la société mathématique de France, tome 24, 1896, p. 217.

3) Annales de la société scientifique de Bruxelles, tome 20, 2e partie, p. 251.

4) Bei dem v. Mangoldt'schen Beweise wird übrigens von diesem Satze kein Gebrauch gemacht.

„Wenn $\vartheta(x)$ die Summe der natürlichen Logarithmen aller Primzahlen $\leqq x$ ist, so existiert $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}$ und ist gleich 1“, ist aber abgesehen von diesem angewandten Satze so elementar, als es der Nachweis einer transcendenten Behauptung sein kann.

§ 1.

Es möge unter $g(x)$ die Summe $\sum\limits_{1}^{[x]} \frac{\mu(k)}{k}$ verstanden werden, wo $[x]$ die grösste nicht oberhalb x gelegene ganze Zahl bezeichnet; hierfür kann einfacher

$$(1) \qquad g(x) = \sum_{1}^{x} \frac{\mu(k)}{k}$$

geschrieben werden; k hat dann alle positiven ganzen Zahlen $\leqq x$ zu durchlaufen. Die Summe hat nur für $x \geqq 1$ eine Bedeutung; für $x < 1$ sei $g(x) = 0$.

Unter Anwendung dieser Bezeichnungsweise lauten die beiden Hilfssätze, welche Herr von Mangoldt in einfacher Weise am Anfange seiner Arbeit beweist [1]) und die im Folgenden auch angewendet werden:

Es ist für alle x

$$(2) \qquad |g(x)| \leqq 1 \text{ [2])}$$

und für alle $x \geqq 1$

$$(3) \qquad \left| \log x \cdot g(x) - \sum_{1}^{x} \frac{\mu(k) \log k}{k} \right| \leqq 3 + C,$$

wo C die Eulersche Constante bezeichnet.

Die Ungleichheitsbedingung (3), welche Herr von Mangoldt nur abgeleitet hat, um sie an einer gewissen Stelle seines Beweises [3]) anzuwenden, dient im Folgenden als Grundlage der ganzen Untersuchung.

Was die Summe $\sum\limits_{1}^{x} \frac{\mu(k) \log k}{k}$ anbetrifft, so glaubte Möbius [4]) bewiesen zu haben, dass sie sich für hinreichend grosse x um

---

1) l. c., S. 837—839.

2) Dieser Satz ist, wie ebenda angegeben ist, schon von Herrn Gram in der Preisschrift bewiesen worden: Undersøgelser angaaende Maengden af Primtal under en given Graense, K. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 6te Raekke, naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling, II, 1884, S. 197—198.

3) l. c., S. 843.

4) „Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 9, S. 122.

beliebig wenig von -1 unterscheidet; sein Beweis ist jedoch nicht stichhaltig. Obgleich neuere Schriftsteller den Satz, dass

$$\lim_{x=\infty} \sum_{1}^{x} \frac{\mu(k)\log k}{k}$$

existiere und $= -1$ sei, für wahrscheinlich halten[1]), ist es noch nicht einmal gelungen, zu beweisen, dass $\sum_{1}^{x} \frac{\mu(k)\log k}{k}$ für alle x zwischen zwei endlichen Grenzen enthalten ist. Da sich nun aus (3) ergiebt:

$$\left| g(x) - \frac{1}{\log x} \sum_{1}^{x} \frac{\mu(k)\log k}{k} \right| \leqq \frac{3+C}{\log x},$$

so folgt, wenn man von dem Euler-v. Mangoldtschen Satze

$$\lim_{x=\infty} g(x) = 0$$

Gebrauch macht, dass

$$\frac{1}{\log x} \sum_{1}^{x} \frac{\mu(k)\log k}{k}$$

sich für $x = \infty$ der Grenze 0 nähert.

Wenn es umgekehrt gelingt, direkt nachzuweisen, dass

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{\log x} \sum_{1}^{x} \frac{\mu(k)\log k}{k}$$

existiert und 0 ist, so ist hiermit offenbar die Gleichung

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

bewiesen; denn da alsdann nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ G so bestimmbar ist, dass für alle $x \geqq G$

$$\left| \frac{1}{\log x} \sum_{1}^{x} \frac{\mu(k)\log k}{k} \right| \leqq \frac{\delta}{2}$$

und

$$0 < \frac{3+C}{\log x} \leqq \frac{\delta}{2}$$

---

1) Z. B. beweist Herr Mertens, welcher die allgemeine Giltigkeit der Ungleichheitsbedingung vermutet:

$$\left| \sum_{1}^{x} \mu(k) \right| \leqq \sqrt{x},$$

dass jener Satz richtig ist, wenn diese Relation allgemein erfüllt ist (Sitzungsberichte der Wiener Akademie, math.-nat. Kl., Bd. 106, Abt. 2ᵃ, S. 774).

ist, so folgt für $x \geqq G$:

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= \left|\left(g(x) - \frac{1}{\log x}\sum_1^x \frac{\mu(k)\log k}{k}\right) + \frac{1}{\log x}\sum_1^x \frac{\mu(k)\log k}{k}\right| \\
&\leqq \left| g(x) - \frac{1}{\log x}\sum_1^x \frac{\mu(k)\log k}{k}\right| + \left|\frac{1}{\log x}\sum_1^x \frac{\mu(k)\log k}{k}\right| \\
&\leqq \frac{3+C}{\log x} + \left|\frac{1}{\log x}\sum_1^x \frac{\mu(k)\log k}{k}\right| \\
&\leqq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,
\end{aligned}$$

also

$$\lim_{x=\infty} g(x) = 0.$$

Der Nachweis, dass für

$$f(x) = \sum_1^x \frac{\mu(k)\log k}{k} \tag{4}$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\log x} = 0 \tag{5}$$

ist, wird nun im Folgenden geliefert werden.

Um den Gang der Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, werde folgender einfache Hilfssatz vorangeschickt, der sich übrigens schon bei Gram[1]) findet: es ist

$$\sum_{\nu=1}^x \frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) = g(x) + \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3} g\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots + \frac{1}{[x]} g\left(\frac{x}{[x]}\right) = 1. \tag{6}$$

In der That besteht der ν^{te} Summand $\frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right)$ aus den Gliedern

$$\frac{1}{\nu}\frac{\mu(1)}{1} = \frac{\mu(1)}{\nu},\quad \frac{1}{\nu}\frac{\mu(2)}{2} = \frac{\mu(2)}{2\nu},\quad \ldots,\quad \frac{1}{\nu}\frac{\mu(n)}{n} = \frac{\mu(n)}{n\nu},\quad \ldots,$$

$$\frac{1}{\nu}\frac{\mu\left[\frac{x}{\nu}\right]}{\left[\frac{x}{\nu}\right]} = \frac{\mu\left[\frac{x}{\nu}\right]}{\left[\frac{x}{\nu}\right]\nu};$$

die Summe $\sum_{\nu=1}^x \frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right)$ besteht also aus Gliedern von der Form $\frac{\mu(n)}{t}$, wo n ein Teiler von t ist, und zwar durchläuft bei festgehaltenem t n alle Teiler von t, und t selbst kann allen ganzen Zahlen von

---

1) l. c., S. 197, woselbst in der für jedes r giltigen Gleichung (43) $r = 1$ zu setzen ist.

1 bis $[x]$ gleich sein, also ist

$$\sum_{\nu=1}^{x} \frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) = \sum_{t=1}^{x} \frac{1}{t} \sum_{n} \mu(n),$$

wo n alle Teiler von t durchläuft; da nun $\sum \mu(n)$ für $t = 1$ gleich 1, sonst gleich 0 ist, so ergiebt sich, wie behauptet,

$$\sum_{\nu=1}^{x} \frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) = 1.$$

§ 2.

Wenn man nun in der Definitionsgleichung (4) von $f(x)$ für

$$k = p_1 p_2 \cdots p_\varrho$$

$\log k$ durch $\log p_1 + \cdots + \log p_\varrho$ ersetzt [1]) und alle Glieder zusammenfasst, in denen der Logarithmus derselben Primzahl vorkommt, so ergiebt sich eine Gleichung von der Form

$$f(x) = \sum F(p, x) \log p$$

wo die Summe sich über alle Primzahlen $p \leqq x$ zu erstrecken hat, und zwar ist, wie sich leicht ergiebt und von Herrn von Mangoldt [2]) zu einem anderen Zwecke gezeigt worden ist,

$$F(p, x) = -\left(\frac{1}{p} \sum_{1}^{\frac{x}{p}} \frac{\mu(k)}{k} + \frac{1}{p^2} \sum_{1}^{\frac{x}{p^2}} \frac{\mu(k)}{k} + \frac{1}{p^3} \sum_{1}^{\frac{x}{p^3}} \frac{\mu(k)}{k} + \cdots\right),$$

eine Reihe, welche nur aus einer endlichen Anzahl von Summanden besteht, da der Summationsbuchstabe der i^{ten} Summe von 1 bis $\left[\frac{x}{p^i}\right]$ läuft, so dass $p^i \leqq x$, also $i \leqq \frac{\log x}{\log p}$ sein muss. Demnach ist

$$f(x) = -\sum_{p \leqq x} \log p \left(\frac{1}{p} g\left(\frac{x}{p}\right) + \frac{1}{p^2} g\left(\frac{x}{p^2}\right) + \frac{1}{p^3} g\left(\frac{x}{p^3}\right) + \cdots\right),$$

$$(7)\quad f(x) = -\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} g\left(\frac{x}{p}\right) - \sum_{p \leqq x} \log p \left(\frac{1}{p^2} g\left(\frac{x}{p^2}\right) + \frac{1}{p^3} g\left(\frac{x}{p^3}\right) + \cdots\right).$$

Da nun nach (2) für alle y

$$|g(y)| \leqq 1$$

---

1) Da $\log k$ mit dem Factor $\frac{\mu(k)}{k}$ multipliziert ist, kommen nur solche k vor, welche aus verschiedenen Primfactoren zusammengesetzt sind.

2) l. c., S. 840.

ist, so ergiebt sich für den absoluten Betrag der zweiten Summe

$$\left|\sum_{p \leqq x} \log p \left(\frac{1}{p^2} g\left(\frac{x}{p^2}\right) + \frac{1}{p^3} g\left(\frac{x}{p^3}\right) + \cdots\right)\right|$$

$$\leqq \sum_{p \leqq x} \log p \left(\frac{1}{p^2} \left|g\left(\frac{x}{p^2}\right)\right| + \frac{1}{p^3} \left|g\left(\frac{x}{p^3}\right)\right| + \cdots\right)$$

$$\leqq \sum_{p \leqq x} \log p \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \cdots + \frac{1}{p^n} + \cdots\right)$$

$$\leqq \sum_{p \leqq x} \log p \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2^2 p^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2} p^2} + \cdots\right)$$

$$\leqq \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p^2} (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots)$$

$$\leqq 2 \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p^2}$$

$$< 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu^2}.$$

Bekanntlich convergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu^2}$; somit nähert sich entweder die zweite Summe auf der rechten Seite von (7) für $x = \infty$ einer bestimmten Grenze, oder ihr Wert oscilliert zwischen zwei endlichen Unbestimmtheitsgrenzen. Jedenfalls nähert sich also ihr Quotient durch $\log x$ für $x = \infty$ der Grenze 0.

Es werde eine Function $h(x)$ durch die Gleichung

$$h(x) = \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} g\left(\frac{x}{p}\right) \tag{8}$$

definiert. Wenn es gelingt, zu zeigen, dass $\lim\limits_{x=\infty} \frac{h(x)}{\log x}$ existiert und 0 ist, so ist, da nach (7)

$$\frac{f(x) + h(x)}{\log x} = - \frac{\sum\limits_{p \leqq x} \log p \left(\frac{1}{p^2} g\left(\frac{x}{p^2}\right) + \frac{1}{p^3} g\left(\frac{x}{p^3}\right) + \cdots\right)}{\log x}$$

ist, und, wie wir soeben sahen, die rechte Seite sich für grosse x der Grenze 0 nähert, die Richtigkeit der Behauptung (5) dargethan.

Der Beweis der Eulerschen Behauptung

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

ist also auf den Nachweis der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{h(x)}{\log x} = 0$$

zurückgeführt, welcher im folgenden Paragraphen erbracht werden wird.

§ 3.

Nach der Definition der Function $\vartheta(x)$[1]) ist für ganze positive ν

$$\begin{aligned} \vartheta(\nu)-\vartheta(\nu-1) &= \log\nu, \text{ wenn } \nu \text{ eine Primzahl ist,} \\ &= 0, \quad \text{wenn } \nu \text{ eine zusammengesetzte Zahl ist,} \\ &= \log\nu = 0, \text{ wenn } \nu = 1 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Also ist

$$h(x) = \sum_{\nu=1}^{x} \frac{\vartheta(\nu)-\vartheta(\nu-1)}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right),$$

wo ν alle ganzen Zahlen zwischen 1 und x zu durchlaufen hat.

An der Stelle der Function $\vartheta(x)$ werde nunmehr durch die Gleichung

$$\vartheta(x) = x\{1+\varepsilon(x)\} \tag{9}$$

eine neue Function $\varepsilon(x)$ eingeführt; unter $\varepsilon(0)$ möge 0 verstanden werden. Es handelt sich nur um Werte von x, die $\geqq 0$ sind. Über die Function $\varepsilon(x)$ ist Folgendes zu bemerken:

1) Da $\vartheta(x)$ seiner Bedeutung gemäss für kein x negativ ist, so ist stets

$$\varepsilon(x) \geqq -1.$$

2) Da nach Herrn Mertens[2]) für alle x

$$\vartheta(x) < 2x$$

ist, so ist stets

$$\varepsilon(x) < 1;$$

also genügt $\varepsilon(x)$ für alle x der Ungleichheitsbedingung

$$|\varepsilon(x)| \leqq 1. \tag{10}$$

3) Da nach dem in der Einleitung[3]) citierten Satz

$$\lim_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$$

ist, so ist

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0. \tag{11}$$

---

1) s. S. 6, Z. 1—2 v. o.

2) „Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78, S. 48.

3) s. S. 6, Z. 1—2 v. o.

Die Einführung der Function $\varepsilon(x)$ ergiebt für $h(x)$ den Ausdruck

$$h(x) = \sum_{\nu=1}^{x} \frac{\nu+\nu\varepsilon(\nu)-(\nu-1)-(\nu-1)\varepsilon(\nu-1)}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{x} \left\{\frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) + \left(\varepsilon(\nu) - \frac{\nu-1}{\nu}\varepsilon(\nu-1)\right) g\left(\frac{x}{\nu}\right)\right\}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{x} \frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{x}\left(\varepsilon(\nu)-\varepsilon(\nu-1)+\frac{1}{\nu}\varepsilon(\nu-1)\right) g\left(\frac{x}{\nu}\right).$$

Nun ist nach dem Hilfssatze auf S. 8—9

$$\sum_{\nu=1}^{x} \frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) = 1;$$

also ergiebt sich

$$(12)\qquad h(x)-1 = \sum_{\nu=1}^{x}\left(\varepsilon(\nu)-\varepsilon(\nu-1)\right) g\left(\frac{x}{\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{x} \frac{1}{\nu}\varepsilon(\nu-1) g\left(\frac{x}{\nu}\right).$$

Für die erste der beiden Summen in (12) erhält man

$$\sum_{\nu=1}^{x}(\varepsilon(\nu)-\varepsilon(\nu-1)) g\left(\frac{x}{\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{x}\varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right)+\varepsilon([x]) g\left(\frac{x}{[x]+1}\right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{x}\varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right),$$

da $x < [x]+1$, also $g\left(\frac{x}{[x]+1}\right) = 0$ ist.

Wenn bei der zweiten Summe in (12) $\nu+1$ statt ν geschrieben wird, so geht sie in

$$\sum_{\nu=0}^{x-1} \frac{1}{\nu+1}\varepsilon(\nu) g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) = \sum_{\nu=1}^{x-1} \frac{1}{\nu+1}\varepsilon(\nu) g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)$$

über. Also ist

$$(13)\qquad h(x)-1 = \sum_{\nu=1}^{x}\varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right)+\sum_{\nu=1}^{x-1}\frac{1}{\nu+1}\varepsilon(\nu) g\left(\frac{x}{\nu+1}\right).$$

δ sei eine beliebig kleine positive Grösse. Dann ist nach (11) G so bestimmbar, dass für alle $\nu \geqq G$

$$(14)\qquad |\varepsilon(\nu)| \leqq \frac{\delta}{3}$$

ist. Es ergiebt sich

$$\left|\sum_{\nu=1}^{x}\varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right)\right| \leqq \left|\sum_{\nu=1}^{G-1}\varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right)\right|$$

$$+\left|\sum_{\nu=G}^{x}\varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right)\right|$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{G-1}|\varepsilon(\nu)|\left|g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right| + \sum_{\nu=G}^{x}|\varepsilon(\nu)|\left|g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right|.$$

Die rechte Seite wird vergrössert, indem man $|\varepsilon(\nu)|$ in der ersten Summe durch 1 ersetzt (nach (10)), in der zweiten Summe durch $\frac{\delta}{3}$ (nach (14)). Es ergiebt sich

$$(15)\quad \left|\sum_{\nu=1}^{x}\varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right)\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{G-1}\left|g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right|$$

$$+\frac{\delta}{3}\sum_{\nu=G}^{x}\left|g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right|.$$

Nun ist

$$\sum_{\nu=1}^{G-1}\left|g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{G-1}\left\{\left|g\left(\frac{x}{\nu}\right)\right|+\left|g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right|\right\}$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{G-1}(1+1) \quad \text{(wegen (2))},$$

also

$$(16)\qquad \sum_{\nu=1}^{G-1}\left|g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right| \leqq 2(G-1)$$

und

$$\sum_{\nu=G}^{x}\left|g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{x}\left|g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{x}\left|\sum_{1}^{\frac{x}{\nu}}\frac{\mu(k)}{k} - \sum_{1}^{\frac{x}{\nu+1}}\frac{\mu(k)}{k}\right|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{x}\left|\sum\frac{\mu(k)}{k}\right|,$$

wo k alle ganzen Zahlen des Intervalles $\frac{x}{\nu+1}$ (excl.) bis $\frac{x}{\nu}$ (incl.) durchläuft. Folglich ist

$$\sum_{\nu=G}^{x}\left|g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{x}\sum_{\frac{x}{\nu}\geqq k>\frac{x}{\nu+1}}\frac{|\mu(k)|}{k} \leqq \sum_{\nu=1}^{x}\sum_{\frac{x}{\nu}\geqq k>\frac{x}{\nu+1}}\frac{1}{k}$$

$$= \sum_{x\geqq k>\frac{x}{2}}\frac{1}{k} + \sum_{\frac{x}{2}\geqq k>\frac{x}{3}}\frac{1}{k} + \sum_{\frac{x}{3}\geqq k>\frac{x}{4}}\frac{1}{k} + \cdots + \sum_{\frac{x}{[x]-1}\geqq k>\frac{x}{[x]}}\frac{1}{k}$$

$$+ \sum_{\frac{x}{[x]}\geqq k\geqq 1}\frac{1}{k} = \sum_{1}^{x}\frac{1}{k},$$

also, da stets

$$\sum_1^x \frac{1}{k} \leqq \log x + 1$$

ist,

$$(17) \qquad \sum_{\nu=G}^{x} \left| g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right| \leqq \log x + 1.$$

Ersetzt man auf der rechten Seite der Ungleichheitsbedingung (15) die beiden Summen beziehlich durch die aus (16) und (17) sich ergebenden grösseren Werte, so ergiebt sich

$$(18) \qquad \left| \sum_{\nu=1}^{x} \varepsilon(\nu) \left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right) \right| \leqq 2(G-1) + \frac{\delta}{3}(\log x + 1).$$

Die Behandlung der zweiten Summe in (13) ist etwas einfacher. Es ergiebt sich

$$\left| \sum_{\nu=1}^{x-1} \frac{1}{\nu+1} \varepsilon(\nu) g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{x-1} \frac{1}{\nu+1} |\varepsilon(\nu)| \left| g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right|$$

$$\leqq \sum_1^{x-1} \frac{|\varepsilon(\nu)|}{\nu+1}$$

$$= \sum_1^{G-1} \frac{|\varepsilon(\nu)|}{\nu+1} + \sum_G^{x-1} \frac{|\varepsilon(\nu)|}{\nu+1}$$

$$\leqq \sum_1^{G-1} \frac{1}{\nu+1} + \sum_G^{x-1} \frac{1}{\nu+1} \frac{\delta}{3}$$

$$\leqq \sum_1^{G-1} 1 + \frac{\delta}{3} \sum_1^{x} \frac{1}{\nu},$$

also

$$(19) \qquad \left| \sum_{\nu=1}^{x-1} \frac{1}{\nu+1} \varepsilon(\nu) g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right| \leqq G - 1 + \frac{\delta}{3}(\log x + 1)$$

Mit Hilfe von (18) und (19) ergiebt sich also aus (13)

$$|h(x)| \leqq 1 + 2G - 2 + \frac{\delta}{3}\log x + \frac{\delta}{3} + G - 1 + \frac{\delta}{3}\log x + \frac{\delta}{3}$$

$$= 3G - 2 + \tfrac{2}{3}\delta + \tfrac{2}{3}\delta \log x,$$

also für alle

$$x \geqq e^{\frac{3G-2+\frac{2}{3}\delta}{\frac{1}{3}\delta}},$$

da alsdann

$$3G-2+\tfrac{2}{3}\delta \leqq \tfrac{1}{3}\delta\log x$$

ist,

$$|h(x)| \leqq \tfrac{1}{3}\delta\log x+\tfrac{2}{3}\delta\log x$$
$$= \delta\log x,$$

$$\left|\frac{h(x)}{\log x}\right| \leqq \delta. \tag{20}$$

Nach Annahme von δ ist also ξ so bestimmbar, dass für alle $x \geqq \xi$ (20) erfüllt ist; folglich existiert $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{h(x)}{\log x}$ und ist $= 0$. Daraus folgt aber, wie in den beiden ersten Paragraphen dieser Arbeit gezeigt worden ist, dass $\lim\limits_{x=\infty} \sum\limits_1^x \dfrac{\mu(k)}{k}$ existiert und 0 ist, also die Richtigkeit der in der Überschrift kurz mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

bezeichneten Gleichung.

§ 4.

Wenn

$$M(x) = \sum_1^x \mu(k)$$

definiert wird [1]), so lässt sich mit Hilfe des Satzes

$$\lim_{x=\infty} g(x) = 0$$

nachweisen, dass

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} = 0$$

ist. Herr von Mangoldt [2]) führt diesen Nachweis indirekt unter Benutzung der Identität

$$g(x) = \sum_1^x \frac{\mu(k)}{k} = \sum_1^x (M(k)-M(k-1))\frac{1}{k}.$$

Er lässt sich folgendermassen direkt erbringen. Aus der Gleichung

$$M(x) = \sum_1^x \mu(k) = \sum_1^x \frac{\mu(k)}{k}\cdot k = \sum_1^x (g(k)-g(k-1)).k$$

---

1) v. Mangoldt, l. c., p. 850.

2) l. c., p. 849—851.

folgt

$$M(x) = \sum_{1}^{x-1} g(k)(k-(k+1)) + g(x)[x]$$
$$= -\sum_{1}^{x-1} g(k) + g(x)[x],$$

also, da nach Annahme von δ G so bestimmbar ist, dass

$$\text{für alle } k \geqq G \qquad |g(k)| \leqq \frac{\delta}{3}$$

ist,

$$\text{für } x \geqq G \qquad |M(x)| \leqq \sum_{1}^{G-1} |g(k)| + \sum_{G}^{x-1} |g(k)| + |g(x)| . x$$
$$\leqq G-1 + \frac{\delta}{3}([x]-G) + \frac{\delta}{3} x,$$

$$\left|\frac{M(x)}{x}\right| \leqq \frac{G-1-\frac{\delta}{3} G}{x} + \tfrac{2}{3}\delta,$$

also für

$$x \geqq \frac{G-1-\frac{\delta}{3} G}{\frac{\delta}{3}} \text{ und zugleich } \geqq G$$

$$\left|\frac{M(x)}{x}\right| \leqq \tfrac{1}{3}\delta + \tfrac{2}{3}\delta = \delta,$$

womit die Behauptung

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} = 0$$

bewiesen ist.

Thesen.

1.

Es ist wünschenswert, jeden Existenzbeweis für eine mathematische Grösse so zu führen, dass sich zugleich ein Weg ergiebt, auf welchem man zu der als existierend zu erweisenden Grösse gelangen kann.

2.

Eine Grenze zwischen den arithmetischen und den analytischen Gebieten der Mathematik kann nicht gezogen werden.

3.

Der Begriff der semiconvergenten Reihe ist ein relativer Begriff.

4.

Aus der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile zweiter Art lässt sich der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie streng beweisen.

5.

Es ist nicht gelungen, die Psychologie auf exacter mathematischer Grundlage zu begründen.

Vita.

Natus sum Edmundus Georgius Hermannus Landau Berolini a. h. s. LXXVII patre Leopoldo, doctore medicinae et chirurgiae atque in universitate Friderica Guilelma Berolinensi nunc professore, matre Johanna e gente Jacoby, quos parentes adhuc vivos veneror. Fidei addictus sum iudaicae. Gymnasium frequentavi Berolinense, cui nomen est „collège royal français“. Ubi maturitatis testimonium a. h. s. LXXXXIII assecutus a Rectore Magnifico Virchow inter cives academicos receptus primum per duo semestria Berolini, tum per duo semestria Monachii, deinde per septem semestria rursus Berolini studiis praecipue mathematicis operam navavi.

Docuerunt me viri clarissimi:

Berolini: Arons, de Bezold, Blasius, Du Bois-Reymond (†), Fischer, Frobenius, Fuchs, Glan (†), Harsley, Hensel, Hettner, Knoblauch, Kundt (†), Paulsen, Planck, Schmekel, Schwarz, Strack, Stumpf.

Charlottenburgi: Steinitz.

Monachii: Bauer, Bauschinger, Carriere (†), Graetz, Lindemann, Pringsheim, Thiele.

Seminarii mathematici Monacensis per duo semestria, Berolinensis per septem semestria sodalis fui, colloquiis viri illustrissimi H. A. Schwarz per quinque semestria, exercitationibus, quas vir clarissimus Planck de rebus mathematico-physicis instituere solet, per tria semestria interfui; denique in laboratorio, quod nunc est sub auspiciis viri doctissimi Rosenheim, autumno a. h. s. LXXXXIV experimentis chemicis operam dedi.

Quibus omnibus viris gratias ago quam maximas, imprimis professoribus illustrissimis Georgio Frobenius, Lazaro Fuchs, Conrado Hensel, Hermanno Amando Schwarz.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner).